

# 量子 de Rham 复形\*

简润强

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

**摘要:** 量子 de Rham 复形首先由 Woronowicz 所构造并进行研究, 它是李群上 de Rham 复形的量子化, 是非交换微分几何中主要研究对象之一。研究了量子 de Rham 上同调的余模结构和相应性质, 并发现了量子 de Rham 双复形的一个消没定理。

**关键词:** 量子 de Rham 上同调; 余模代数; 消没定理

**中图分类号:** O153.3; O154.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2010) 02-0145-04

## Quantum de Rham Complex

JIAN Runqiang

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** Quantum de Rham complex was first constructed and studied by Woronowicz. It is the quantization of the de Rham complex on Lie groups. It is one of the main objects being studied in noncommutative differential geometry. The comodule structure of the quantum de Rham cohomology and other properties are discussed. And a vanishing theorem of the quantum de Rham bicomplex is proved.

**Key words:** quantum de Rham cohomology; comodule-algebra; vanishing theorem

1989 年 Woronowicz<sup>[1]</sup> 在他的文章中提出了 Hopf 代数上一阶微分, 并证明了若这个一阶微分是双协变的, 则在它上面存在一个自然的 Yang-Baxter 算子。利用这个算子, 他构造了高阶的微分。他的构造实质上是李群上 de Rham 复形的量子化。作为量子群和非交换几何里重要研究对象之一, Woronowicz 的量子 de Rham 复形在近 20 年里已有了大量的研究, 如代数方面的有文献 [2-5] 等, 而关于非交换几何方面则有文献 [6-9] 等。本文考虑这个量子 de Rham 复形的上同调群, 讨论了它的余模结构和相关性质, 另外证明了一个量子 de Rham 双复形上的消没定理。

### 1 量子群上的微分运算

在本节中, 对 Woronowicz 的量子群上的微分作一简要介绍, 并取用 Sweedler 关于余代数和余模

的记号 (参见 [10])。本节内容取材于文献 [1]。设  $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  为一 Hopf 代数。

**定义 1** ([1], 定义 1.1) 对于一个  $A$ -双模  $\Gamma$ , 若存在一线性映射  $d: A \rightarrow \Gamma$  满足下列条件:

- 1) 对任意的  $a, b \in A$ , 有
 
$$d(ab) = (da)b + adb$$
- 2) 对任意的  $\vartheta \in \Gamma$ , 它一定能写成如下形式

$$\vartheta = \sum_{k=1}^K a_k db_k$$

其中  $a_k, b_k \in A, K \in \mathbb{N}$ 。

则称  $\Gamma$  为  $A$  上的一阶微分。

**定义 2** ([1], 定义 1.2, 1.3) 设  $(\Gamma, d)$  是  $A$  上的一个一阶微分, 对任意的  $a_k, b_k \in A$ ,

- 1) 若  $(\sum a_k db_k = 0) \Rightarrow (\sum \Delta(a_k)(id \otimes d)\Delta(b_k) = 0)$ , 则称  $\Gamma$  是左协变的;

\* 收稿日期: 2008-12-23

基金项目: 中山大学中法数学合作基金资助项目 (34000-3275100); 青年教师起步计划资助项目 (34000-3171917)

作者简介: 简润强 (1980 年生), 男, 博士生; E-mail: sysujian@hotmail.com

2) 若  $(\sum a_k db_k = 0) \Rightarrow (\sum \Delta(a_k)(d \otimes id)\Delta(b_k) = 0)$ , 则称  $\Gamma$  是右协变的;

3) 若  $\Gamma$  同时为左右协变的, 则称它是双协变的。

**命题 1** ([1], 命题 1.4) 若一阶微分  $\Gamma$  是双协变的, 则存在  $\Gamma$  上的左余模结构  $\Phi_\Gamma$  和右余模结构  ${}_\Gamma\Phi$  使得  $(\Gamma, \Phi_\Gamma, {}_\Gamma\Phi)$  是一 Hopf 双模。

下面, 我们令  $\Gamma^{\otimes n} = \Gamma \otimes_A \cdots \otimes_A \Gamma$ , 并定义

$$\Phi_\Gamma^{\otimes n}(\vartheta_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \vartheta_n) = \sum (\vartheta_1)_{(-1)} \cdots (\vartheta_n)_{(-1)} \otimes (\vartheta_1)_{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A (\vartheta_n)_{(0)},$$

和

$${}_\Gamma\Phi^{\otimes n}(\vartheta_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \vartheta_n) = \sum (\vartheta_1)_{(0)} \otimes_A \cdots \otimes_A (\vartheta_n)_{(0)} \otimes (\vartheta_1)_{(1)} \cdots (\vartheta_n)_{(1)}.$$

**定理 1** ([1], 命题 3.1) 若一阶微分  $\Gamma$  是双协变的, 则存在一个 Yang-Baxter 算子  $\sigma: \Gamma^{\otimes 2} \rightarrow \Gamma^{\otimes 2}$ , 且它同时为左右余模同态。

**定义 3** 令  $A_n = \sum_{w \in S_n} (-1)^{l(w)} T_w$ , 其中  $T_w$  是  $w$  关于  $\sigma$  在辫子群上的提升。若令  $S^n = \text{Ker } A_n$ , 则称  $\Gamma^\wedge = \Gamma^{\otimes} / \bigoplus_{n=2}^\infty S^n = \bigoplus_{n=0}^\infty \Gamma^{\wedge n}$  为  $\Gamma$  上的外代数。

**定理 2** ([1], 定理 4.1) 设  $(\Gamma, d)$  是一个  $A$  上的双协变的一阶微分, 并设  $\Phi_\Gamma$  和  ${}_\Gamma\Phi$  为其左右余作用。则对  $\Gamma$  上的外代数  $(\Gamma^\wedge, \Phi_\Gamma^\wedge, {}_\Gamma\Phi^\wedge)$ , 存在唯一的线性映射  $d: \Gamma^\wedge \rightarrow \Gamma^\wedge$ , 使得:

- 1)  $d$  把  $p$  次元素映为  $p+1$  次元素;
- 2) 对 0 次元素,  $d$  即为一次微分算子  $d: A \rightarrow \Gamma$ ;

3) 对任意的  $\theta \in \Gamma^{\wedge k}$  和  $\theta' \in \Gamma^\wedge$ , 有  $d(\theta \wedge \theta') = d\theta \wedge \theta' + (-1)^k \theta \wedge d\theta'$

4) 对任意的  $\theta \in \Gamma^\wedge$ ,  $d(d\theta) = 0$

5)  $d$  是双协变的:

$$\begin{aligned} \Phi_\Gamma^\wedge \circ d &= (id \otimes d) \circ \Phi_\Gamma^\wedge, \\ {}_\Gamma\Phi^\wedge \circ d &= (d \otimes id) \circ {}_\Gamma\Phi^\wedge \end{aligned}$$

## 2 量子 de Rham 上同调

称

$$H_{q-dR}^p = \bigoplus_{p=0}^\infty H_{q-dR}^p = \bigoplus_{p=0}^\infty \text{Ker}(d_p: \Gamma^{\wedge p} \rightarrow \Gamma^{\wedge p+1}) / d_{p-1}(\Gamma^{\wedge p-1})$$

为量子 de Rham 上同调。

**命题 2**  $H_{q-dR}^p$  是一个  $A$  双余模, 其左右余模结构分别为:

$$\varphi_L: H_{q-dR}^p \rightarrow A \otimes H_{q-dR}^p,$$

$$\theta \mapsto \sum_{(\bar{\theta})} \theta_{(-1)} \otimes \overline{\theta_{(0)}},$$

和

$$\begin{aligned} \varphi_R: H_{q-dR}^p &\rightarrow H_{q-dR}^p \otimes A, \\ \bar{\theta} &\mapsto \sum_{(\bar{\theta})} \overline{\theta_{(0)}} \otimes \theta_{(1)}, \end{aligned}$$

其中  $\bar{\theta}$  表示  $\theta$  在  $H_{q-dR}^p$  中的等价类。

**证明** 设  $\pi: \Gamma^{\wedge p} \rightarrow H_{q-dR}^p$  为典型映射。若  $\theta \in \text{Ker } d_p$ , 则

$$(id_A \otimes d_p) \circ \Phi_\Gamma^{\wedge p}(\theta) = \Phi_\Gamma^{\wedge p+1} \circ d_p(\theta) = 0.$$

所以  $\Phi_\Gamma^{\wedge p}(\theta) \in \text{Ker}(id \otimes d_p) = A \otimes \text{Ker } d_p$ 。另外, 对于  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Ker } d_p$  且满足  $\theta_1 - \theta_2 = d_{p-1}\theta'$ , 则

$$\begin{aligned} \varphi_L(\overline{\theta_1 - \theta_2}) &= (id_A \otimes \pi) \circ \Phi_\Gamma^{\wedge p}(\theta_1 - \theta_2) = \\ &= (id_A \otimes \pi) \circ (id_A \otimes d_{p-1}) \circ \Phi_\Gamma^{\wedge p}(\theta') = \\ &= (id_A \otimes \pi \circ d_{p-1}) \circ \Phi_\Gamma^{\wedge p}(\theta') = 0 \end{aligned}$$

所以  $\varphi_L$  是定义良好的。由定义, 易知  $\varphi_L$  是一左余模结构。同理可知  $\varphi_R$  为一右余模结构, 并且  $(id \otimes \varphi_R)\varphi_L = (\varphi_L \otimes id)\varphi_R$ 。证毕。

**命题 3**  $H_{q-dR}^p$  是一个分次的  $\mathbb{C}$  上的代数, 其单位元为  $\overline{1_A}$ 。

**证明** 对任意的  $\theta_1 \in \text{Ker } d_i, \theta_2 \in \text{Ker } d_j$  和任意  $\eta_1 \in \Gamma^{\wedge i-1}, \eta_2 \in \Gamma^{\wedge j-1}$ , 有:

$$\begin{aligned} (\theta_1 + d_{i-1}\eta_1)(\theta_2 + d_{j-1}\eta_2) &= \theta_1 \wedge \theta_2 + \\ \theta_1 \wedge d_{j-1}\eta_2 + d_{i-1}\eta_1 \wedge \theta_2 + d_{i-1}\eta_1 \wedge d_{j-1}\eta_2 &= \\ \theta_1 \wedge \theta_2 + d_{i+j-1}((-1)^{i-1}\theta_1 \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge \theta_2 + \eta_1 \wedge d_{j-1}\eta_2) \end{aligned}$$

故由上公式定义的乘法是良好定义的。又因为  $1_A \in \text{Ker } d_0$ , 所以  $\overline{1_A} \in H_{q-dR}^0$  是单位元。证毕。

**命题 4**  $H_{q-dR}^p$  是一个  $A$  余模代数。

**证明** 对任意的  $\theta_1 \in \text{Ker } d_i$  和  $\theta_2 \in \text{Ker } d_j$ :

$$\begin{aligned} \varphi_L(\overline{\theta_1 \wedge \theta_2}) &= \varphi_R(\overline{\theta_1 \wedge \theta_2}) = \\ \sum_{(\theta_1), (\theta_2)} (\theta_1)_{(-1)} (\theta_2)_{(-1)} \otimes (\theta_1)_{(0)} \wedge (\theta_2)_{(0)} &= \\ \sum_{(\theta_1), (\theta_2)} (\theta_1)_{(-1)} (\theta_2)_{(-1)} \otimes (\theta_1)_{(0)} \wedge (\theta_2)_{(0)} &= \\ \varphi_L(\overline{\theta_1}) \cdot \varphi_L(\overline{\theta_2}) \end{aligned}$$

显然, 有  $\varphi_L(\overline{1_A}) = 1_A \otimes \overline{1_A}$ 。证毕。

令  ${}_{inv}\Gamma = \{\omega \in \Gamma \mid \Phi_\Gamma(\omega) = 1_A \otimes \omega\}$  和  $\Gamma_{inv} = \{\eta \in \Gamma \mid {}_\Gamma\Phi(\eta) = \eta \otimes 1_A\}$ 。由  $\Phi_\Gamma^\wedge \circ d = (id \otimes d) \circ \Phi_\Gamma^\wedge$  和  ${}_\Gamma\Phi^\wedge \circ d = (d \otimes id) \circ {}_\Gamma\Phi^\wedge$ , 知  $d({}_{inv}\Gamma^\wedge) \subset {}_{inv}(\Gamma^\wedge)$  和  $d((\Gamma^\wedge)_{inv}) \subset (\Gamma^\wedge)_{inv}$ 。显然,  ${}_{inv}(\Gamma^\wedge)$  和  $(\Gamma^\wedge)_{inv}$  是  $\Gamma^\wedge$  的子代数。由此得到  $H_{q-dR}^p$  的两个子代数:

$$\begin{aligned} {}_{inv}H^\circ &= \bigoplus_{inv} H^k = \\ \bigoplus \text{Ker}(d: {}_{inv}(\Gamma^{\wedge k}) \rightarrow {}_{inv}(\Gamma^{\wedge k+1})) / d({}_{inv}(\Gamma^{\wedge k-1})), \end{aligned}$$

$$H_{inv}^\circ = \bigoplus H_{inv}^k =$$

$$\bigoplus \text{Ker}(d: (\Gamma^{\wedge k})_{inv} \rightarrow (\Gamma^{\wedge k+1})_{inv}) / d((\Gamma^{\wedge k-1})_{inv})$$

由文献 [1] 知  $_{inv}(\Gamma^\wedge)$  和  $(\Gamma^\wedge)_{inv}$  分别为右  $A$  余模和左  $A$  余模。所以  $H_{inv}^\circ$  是一个  $A$  双余模, 其左右余模结构为  $\varphi_L$  和  $\varphi_R$  在  $H_{inv}^\circ$  上的限制。对  $_{inv}H^\circ$ , 有同样的结果。显然, 有关系:

$$(H_{q-dR}^\circ)_{inv} = H_{inv}^\circ = ({}_{inv}H^\circ)_{inv},$$

$${}_{inv}(H_{q-dR}^\circ) = {}_{inv}H^\circ = {}_{inv}(H_{inv}^\circ)$$

设  $C$  是一个余代数,  $(N, \delta_R)$  是一个右  $C$  余模。对任意的  $i = 0, 1, \dots$ , 令  $N^i = N \otimes C^{\otimes i}$ , 并定义映射  $\delta_i^j: N^i \rightarrow N^{i+1}$  如下: 对任意的  $n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_i$ ,

$$\delta_i^j(n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_i) = \begin{cases} \delta_R(n) \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_i, & \text{若 } j = 0 \\ n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes \Delta(c_j) \otimes \dots \otimes c_i, & \text{若 } 1 \leq j \leq i \end{cases}$$

如果定义  $\delta_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \delta_i^j: N^i \rightarrow N^{i+1}$ , 易知  $(N^i, \delta_i)$  是一个复形 (参加 [11] 第 432 页)。

更进一步,  $(N^i, \delta_i)$  是零伦的。首先, 注意到  $\delta_R$  是单射, 这是由于  $(id \otimes \varepsilon) \circ \delta = id$ 。定义  $h_i = (-1)^{i+1} id_N \otimes id_{A^{\otimes i-1}} \otimes \varepsilon: N^i \rightarrow N^{i-1}$ 。则对任意的  $n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_i \in N^i$ ,

$$\begin{aligned} & (h_{i+1} \delta_i + \delta_{i-1} h_i)(n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_i) = \\ & (-1)^{i+2} \sum_{(n)} n_{(0)} \otimes n_{(1)} \otimes c_1 \otimes \dots \otimes \varepsilon(c_i) + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+i+2} \sum_{(c_j)} n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes \Delta(c_j) \otimes \dots \otimes \varepsilon(c_i) + \\ & (-1)^{i+i+2} \sum_{(c_i)} n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes \varepsilon((c_i)_{(1)})(c_i)_{(2)} + \\ & \varepsilon(c_i) \sum_{(n)} (-1)^{i+1} n_{(0)} \otimes n_{(1)} \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_{i-1} + \\ & \varepsilon(c_i) \sum_{l=1}^{i-1} (-1)^{l+i+1} \sum_{(c_l)} n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes \Delta(c_{l+1}) \otimes \dots \\ & \otimes c_{i-1} = n \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_i \end{aligned}$$

**命题 5** 令  $\Gamma^{i,j} = \Gamma^{\wedge i} \otimes A^{\otimes j}$ ,  $d_{i,j}^h = d_i \otimes id_{A^{\otimes j}}$  和  $d_{i,j}^v = (-1)^i \delta_j$ , 则  $\Gamma^{*,*} = (\bigoplus \Gamma^{i,j}, d^h, d^v)$  是一个双复形, 即  $d^h d^v + d^v d^h = 0$ 。

**证明** 对任意的  $\omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j \in \Gamma^{i,j}$ , 有

$$\begin{aligned} & D(d^v d^h + d^h d^v)(\omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j) = \\ & d^v(d\omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j) + \\ & (-1)^i d^h(\sum_{(\omega)} \omega_{(0)} \otimes \omega_{(1)} \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j) + \\ & (-1)^i d^h(\sum_{k=1}^j (-1)^k \omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes \Delta(a_k) \otimes \dots \otimes a_j) = \\ & (-1)^{i+1} \sum_{(d\omega)} (d\omega)_{(0)} \otimes (d\omega)_{(1)} \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j + \\ & \sum_{l=1}^j (-1)^{i+1+l} \omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes \Delta(a_l) \otimes \dots \otimes a_j + \end{aligned}$$

$$(-1)^i \sum_{(\omega)} d\omega_{(0)} \otimes \omega_{(1)} \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j +$$

$$\sum_{k=1}^j (-1)^{i+k} d\omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes \Delta(a_k) \otimes \dots \otimes a_j = 0$$

其中最后一个等式来自  $\Gamma \Phi^\wedge$ 。  $d = (d \otimes id) \circ \Gamma \Phi^\wedge$ 。证毕。

**引理 1** 设  $(C_{*,*}, d^v, d^h)$  是一所有列均为正合的双复形, 则全复形  $C_{*,*}$  是零伦的, 即对任意的  $p \geq 0$ , 有  $H^p(\text{Tot}(C_{*,*})) = 0$ 。

**证明** 此即熟知的 Acyclic Assembly Lemma。证明参见文献 [12] 第 59 至第 61 页。

**定理 3** 对任意  $p \geq 0$ , 有  $H^p(\text{Tot}(\Gamma^{*,*})) = 0$ 。

**证明** 由之前对  $\delta_k$  的讨论, 知对任意的  $i$ ,  $(\Gamma^{i,*}, d_{i,*}^v)$  是正合的。再对双复形  $\Gamma^{*,*} = (\bigoplus \Gamma^{i,j}, d^h, d^v)$  运用上述引理, 便得到所要结论。

**致谢:** 作者对 Marc Rosso 教授对本文所提出的建议和跟作者所作的讨论表示衷心的感谢。

**参考文献:**

- [1] WORONOWICZ S. Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups) [J]. Commun Math Phys, 1989, 122: 125 - 170.
- [2] BAUMANN P, SCHMITT F. Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups (a representation-theoretic approach) [J]. Commun Math Phys, 1998, 194: 71 - 86.
- [3] BRZEZINSKI T. Remarks on bicovariant differential calculi and exterior Hopf algebras [J]. Lett Math Phys, 1993, 27: 287 - 300.
- [4] ROSSO M. Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif [J]. Duke Math J, 1990, 61: 11 - 40.
- [5] SCHMUDGEN K, SCHULER A. Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups of type A, B, C and D [J]. Commun Math Phys, 1995, 167: 635 - 670.
- [6] BEGGS E J, BRZEZINSKI T. The Serre spectral sequence of a noncommutative fibration for de Rham cohomology [J]. Acta Math, 2005, 195: 155 - 196.
- [7] HECKENBERGER I. Hodge and Laplace-Beltrami operators for bicovariant differential calculi on quantum groups [J]. Compositio Math, 2000, 123: 329 - 354.
- [8] HECKENBERGER I. Spin geometry on quantum groups via covariant differential calculi [J]. Adv Math, 2003, 175: 197 - 242.

(下转第 150 页)

用和镇痛作用,其抗炎作用主要是通过促肾上腺皮质激素合成增加而产生的<sup>[4]</sup>。

从折苞斑鸠菊的中提取到的化合物,根据相关文献表明,其具有抗炎、抗氧化和抗癌的活性,而目前对于黄酮类化合物的抗氧化物质研究已经有较多的了解,市场上也有很多以黄酮类成分为主的药物制剂。折苞斑鸠菊化学成分的研究,对寻求新的天然抗氧化剂,对开发斑鸠菊属植物中与抗炎、抗氧化和抗癌活性相关的新药及功能性保健品具有现实意义。

#### 参考文献:

- [1] 姚新生,吴立军,吴继洲.天然药物化学[M].4版.北京:人民卫生出版社,2003:177-180.
- [2] MARINEZ V, BARBERA O, SANCHEZ-PARAREDA J, et al. Phenolic and acetylenic metabolites from *Artemisia assoana* [J]. *Phytochemistry*, 1987, 26 (9) : 2619 - 2924.
- [3] ELGAMAL M H A, OUF S A, HANNNA A G, et al. Phytochemical and mycological investigation of *Artemisia monosperma* [J]. *Folia Microbiol*, 1997, 42 (3) : 203 - 210.
- [4] 袁晓凡,赵兵,王玉春.雪莲的研究进展[J].*中草药*, 2004,35(12):1424-1426.
- [5] 唐栩,许东晖,梅雪婷.26种黄酮类天然活性成分的药理研究进展[J].*中药材*,2003,26(1):46-54.
- [6] 黄梦初,廖志新,陈道峰.沙生风毛菊的化学成分及其细胞毒活性[J].*中草药*,2007,38(10):1463-1466.

(上接第 147 页)

- [9] KUSTERMANS J, MURPHY G J, TUSET L. Quantum groups, differential calculi and the eigenvalues of the Laplacian [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2005, 357: 4681 - 4717.
- [10] SWEEDLER M. Hopf algebras [M]. New York: W A Benjamin Inc, 1969: 336.
- [11] KASSEL C. Quantum groups, graduate texts in mathematics 155 [M]. New York: Springer-Verlag, 1995: 531.
- [12] WEIBEL C. An introduction to homological algebra [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994: 450.